ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ
ΛΥΣΕΙΣ
25 Ιουνίου 2013
Χάρης Σκόκος

---

1) α) (0,5 μονάδες) Ποία σχέση συνδέει τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_i$ της φυσικής, και $\vec{\epsilon}^{\,i}$ της αντίστροφης φυσικής βάσης σε ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (u^1, u^2, u^3);
β) (1 μονάδα) Να αποδείξετε αυτή τη σχέση.
γ) (1 μονάδα) Έστω ότι σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (u^1, u^2, u^3) τα διανύσματα της φυσικής βάσης είναι

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}_1 &= \sin u^2 \cos u^3 \vec{e}_1 + \sin u^2 \sin u^3 \vec{e}_2 + \cos u^2 \vec{e}_3 \\
\vec{\epsilon}_2 &= u^1 \cos u^2 \cos u^3 \vec{e}_1 + u^1 \cos u^2 \sin u^3 \vec{e}_2 - u^1 \sin u^2 \vec{e}_3 \\
\vec{\epsilon}_3 &= -u^1 \sin u^2 \sin u^3 \vec{e}_1 + u^1 \sin u^2 \cos u^3 \vec{e}_2
\end{aligned}$$

όπου $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ μοναδιαία διανύσματα βάσης Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Να βρείτε τα διανύσματα της αντίστροφης φυσικής βάσης.

Λύση: α) Εξίσωση (10) παραγράφου §1 από το βιβλίο των Ι.Δ. Χατζηδημητρίου και Γ.Δ. Μπόζη 'Εισαγωγή στη Μηχανική των Συνεχών Μέσων':

$$\vec{\epsilon}^{\,i} \vec{\epsilon}_j = \delta^i_j.$$

β) Σελίδες 11-12 [εξισώσεις (9)-(11)] παραγράφου §1 από το βιβλίο των Ι.Δ. Χατζηδημητρίου και Γ.Δ. Μπόζη: 'Εισαγωγή στη Μηχανική των Συνεχών Μέσων'.
γ) Ορίζουμε την ορθοκανονική βάση

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{u^1} &= \frac{\vec{\epsilon}_1}{|\vec{\epsilon}_1|} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_{u^1} = \vec{\epsilon}_1 \\
\vec{e}_{u^2} &= \frac{\vec{\epsilon}_2}{|\vec{\epsilon}_2|} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_{u^2} = \frac{1}{|u^1|}\vec{\epsilon}_2 \\
\vec{e}_{u^3} &= \frac{\vec{\epsilon}_3}{|\vec{\epsilon}_3|} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_{u^3} = \frac{1}{|u^1 \sin u^2|}\vec{\epsilon}_3
\end{aligned}$$

Από την απάντηση του ερωτήματος α) καταλαβαίνουμε ότι τα διανύσματα της φυσικής, και της αντίστροφης φυσικής βάσης είναι παράλληλα μεταξύ τους. Οπότε

$$\vec{\epsilon}^{\,1} \vec{\epsilon}_1 = 1 \Rightarrow |\vec{\epsilon}^{\,1}| \vec{e}_{u^1} |\vec{\epsilon}_1| \vec{e}_{u^1} = 1 \Rightarrow |\vec{\epsilon}^{\,1}| = 1 \Rightarrow \vec{\epsilon}^{\,1} = \vec{e}_{u^1} = \vec{\epsilon}_1.$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}^{\,2} &= \frac{1}{|u^1|}\vec{e}_{u^2} = \frac{1}{(u^1)^2}\vec{\epsilon}_2 \\
\vec{\epsilon}^{\,3} &= \frac{1}{|u^1 \sin u^2|}\vec{e}_{u^3} = \frac{1}{(u^1)^2 \sin^2 u^2}\vec{\epsilon}_3.
\end{aligned}$$

2) Η επίπεδη κίνηση συνεχούς μέσου καθορίζεται από τις σχέσεις

$$x_1 = t + \xi^1, \quad x_2 = \frac{t^2}{2} + t + \xi^2.$$

Να βρεθούν:
α) (1,5 μονάδες) Η τροχιά του σωματιδίου που σε χρόνο $t = 1$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.
β) (1 μονάδα) Η γραμμή ροής που σε χρόνο $t_0 = 1$ περνάει από την αρχή των αξόνων.

Λύση: α) Για $t = 1$ έχουμε $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ οπότε $\xi^1 = -1$ και $\xi^2 = -3/2$. Επομένως οι αρχικές εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$x_1 = t - 1, \quad x_2 = \frac{t^2}{2} + t - \frac{3}{2}.$$

Απαλείφοντας τον χρόνο ανάμεσα τους ($t = x_1 + 1$) βρίσκουμε τελικά

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2} + 2x_1.$$

β) Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = 1, \quad u_2 = \frac{dx_2}{dt} = t + 1.$$

Οπότε για τη γραμμή ροής για $t = 1$ έχουμε

$$\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} \Rightarrow \frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{2} \Rightarrow 2x_1 = x_2 + c.$$

Επειδή η γραμμή ροής περνάει από το σημείο $(0, 0)$ έχουμε $c = 0$. Τελικά παίρνουμε

$$2x_1 = x_2.$$

3) Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων

$$u_x = -2z^2, \quad u_y = 0, \quad u_z = 3x^2.$$

α) (0,5 μονάδες) Προέρχεται από δυναμικό;
β) (1 μονάδα) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών ροής.
γ) (1 μονάδα) Να βρεθούν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης συναρτήσει των μεταβλητών του Euler.

Λύση: α) Επειδή $\mathrm{rot}\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2z^2 & 0 & 3x^2 \end{vmatrix} = (-6x - 4z)\vec{e_2} \neq \vec{0}$ το πεδίο δεν προέρχεται από δυναμικό.
β) Για να βρούμε την εξίσωση των γραμμών ροής έχουμε:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = d\lambda.$$

Εύκολα βρίσκουμε $\dfrac{dy}{u_y} = d\lambda \Rightarrow dy = u_y d\lambda = 0 \Rightarrow y = \xi^2 =$ σταθερά.
Επίσης έχουμε $\dfrac{dx}{-2z^2} = \dfrac{dz}{3x^2} \Rightarrow 2z^2 dz = -3x^2 dz \Rightarrow 2\displaystyle\int z^2 dz = -3\int x^2 dx \Rightarrow 2z^3 = -3x^2 + c.$
Η σταθερά c καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες και ισούται με $c = 2(\xi^3)^3 + 3(\xi^1)^3$.
Επομένως οι γραμμές ροής περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$z^3 = -\frac{3}{2}x^3 + (\xi^3)^3 + \frac{3}{2}(\xi^1)^3, \quad y = \xi^2.$$

γ) Για την εύρεση των συνιστωσών της επιτάχυνσης χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$\alpha_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{u}\vec{\nabla}u_i$$

Επομένως έχουμε

$$\alpha_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z = 0 + 0 + 0 - 4z(3x^2) \Rightarrow \alpha_x = -12x^2 z.$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\alpha_y = 0, \quad \alpha_z = -12xz^2.$$

4) Η κατάσταση τάσης σε συνεχές μέσο καθορίζεται από τον τανυστή τάσης:

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{23} = 0, \quad p_{12} = 10x_3, \quad p_{13} = -10x_2.$$

Να βρεθούν κατά μέτρο η ορθή (1 μονάδα) και η διατμητική τάση (1,5 μονάδες) που αντιστοιχούν στο εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $3x_1^2 - 4x_3^2 + \frac{1}{4} = 0$ στο σημείο της $A\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

Λύση: α) Η γενική μορφή του τανυστή τάσης είναι

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 10x_3 & -10x_2 \\ 10x_3 & 0 & 0 \\ -10x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 4x_3^2 + \frac{1}{4} = 0$ είναι το $\vec{\nabla}\Phi = (6x_1, 0, -8x_3)$.
Επομένως το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια στο σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ είναι το.

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} = \frac{1}{5}(3, 0, 4).$$

Το αντίστοιχο διάνυσμα τάσης είναι

$$\vec{p} = T_A\vec{n} = \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το διάνυσμα τάσης $\vec{p}$ γράφεται ως άθροισμα της ορθής $\vec{p}_n$ και της διατμητικής τάσης$\vec{p}_\tau$

$$\vec{p} = \vec{p}_n + \vec{p}_\tau.$$

Για τα μέτρα p_n, p_τ αυτών των διανυσμάτων έχουμε

$$p_n = \vec{p} \cdot \vec{n} = \frac{1}{5}(3, 0, 4)(0, -3, 0) = 0.$$

$$p_\tau^2 = \vec{p}^2 - (\vec{p} \cdot \vec{n})^2 \Rightarrow p_\tau^2 = \vec{p}^2 \Rightarrow p_\tau = |\vec{p}| = 3.$$